

# CHAOS und COMPUTERGRAFIK

*Dieter Hannemann*

1. Chaotische Systeme
2. Entwicklung von Lebewesen in begrenzten Lebensräumen
3. Rückgekoppelte Systeme
4. Die Mandelbrotmenge



**Abb.1** (Titelseite): Schönheit im Chaos. Detailstruktur aus dem Randbereich der Mandelbrotmenge (Kap.4).

## 1. Chaotische Systeme

Viele Systeme in Natur und Technik neigen unter bestimmten Bedingungen dazu, chaotische Zustände anzunehmen. Hierbei treten dann keine gleichbleibenden (stationären) Verhältnisse mehr auf, vielmehr wechseln die Systemzustände ununterbrochen zwischen unterschiedlichen Werten hin und her: Aus Ordnung wird Chaos.

### Beispiele:

- *Astronomie*: Planetensysteme, Struktur der Saturn-Ringe.
- *Biologie*: Entwicklung von Lebewesen in begrenzten Lebensräumen (Kap.2).
- *Chemie*: Reaktionskinetik.

- *Medizin*: Herzflimmern = lebensgefährlicher völlig unregelmäßiger Herzschlag.
- *Meteorologie*: Entwicklung des Wetters aufgrund der Luftströmungen etc.
- *Physik*: Zusammenhängende Pendel (Doppelpendel, s.u.), Laser.
- *Technik*: Turbulenzen in Strömungen, rückgekoppelte elektronische Systeme.

### Einige Beispiele im Detail:

*Billard*: Die Gravitationskraft eines Menschen in ca. 1 m Entfernung vom Billardtisch macht den Ausgang der 9ten Karambolage der Kugeln bereits völlig unbestimmt. Dies bedeutet, daß der Lauf einer Kugel nach dem 9ten freien Stoß hintereinander jede beliebige Richtung haben kann, je nachdem wo der Mensch in 1 m Entfernung gerade steht.

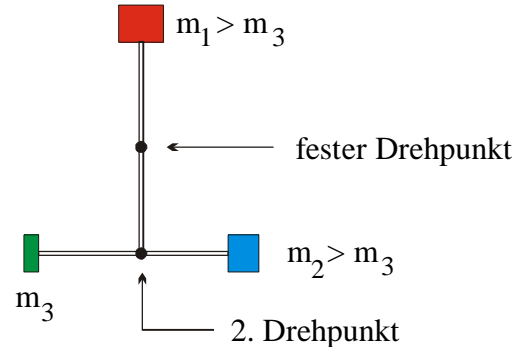
*Stöße der Gasmoleküle*: Die denkbar kleinste Kraft geht wohl von der Gravitationskraft eines Elektrons am Rande des Universums aus. Die Wirkung dieser

Kraft auf die Moleküle eines Gases auf der Erde bei ihrer durch ständige Stöße charakterisierten Bewegung bewirkt, daß nach dem 56ten Zusammenstoß jede Bewegungsrichtung gleich wahrscheinlich ist.

Chaotische Zustände sind in der Natur die Regel. Wie kommt es aber, daß wir meinen, in einer relativ geordneten Welt zu leben (wobei einige Zeitgenossen dies vielleicht verneinen)? Der Grund dafür ist in der unterschiedlichen Dynamik der Systeme zu suchen. Während bei den Gasmolekülen der chaotische Zustand bereits nach ca. 1/20.000.000 Sekunden eintritt, bleibt unser Planetensystem für einige Milliarden Jahre stationär (im Zustand der Ordnung) ehe es ins Chaos stürzt.

Ein Beispiel aus dem Alltag - für chaotische Systeme - stellen die überall angebotenen Pendelsysteme dar. Diese für den Hausgebrauch zur Unterhaltung gedachten Systeme bestehen aus gekoppelten Pendeln (ähnlich Abb.2); mit zusätzlichen Magneten, um Störungen zu erzeugen und um dem System über eine Batterie und einen

Schwingkreis im Fuß des Systems die durch Reibung abgeflossenen Energie wieder zuzuführen.



**Abb.2:** Chaotisches Pendelsystem

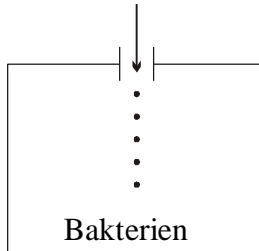
Das Pendelsystem in Abb.2 besteht aus zwei gekoppelten Pendeln. Um den ortsfesten Drehpunkt pendelt das gesamte System. Der zweite Drehpunkt pendelt mit und hierum führt das Drehpendel, das aus den Massen  $m_2$  und  $m_3$  besteht, unregelmäßige Drehschwingungen aus.

## 2. Entwicklung von Lebewesen in begrenzten Lebensräumen

Das folgende Gedankenexperiment soll aufzeigen, wie ein System vom Zustand der Ordnung in den chaotischen Zustand übergehen kann, wenn ein Systemparameter verändert wird. Darüber hinaus lassen sich aus diesem Experiment erstaunliche Konsequenzen für chaotische Systeme ableiten.

Wir betrachten das Wachstum von Bakterien in einem abgeschlossenen Lebensraum (Abb.3).

Kontinuierliche zufließende Nährlösung



**Abb.3:** Bakterien in einem abgeschlossenen Glas bekommen pro Zeiteinheit immer die gleiche Nahrungsmenge

Wenn  $N$  die maximal mögliche Anzahl der Lebewesen aufgrund des Nahrungsangebotes ist und  $p_n$  die Anzahl der Lebewesen zum Zeitpunkt  $n$  (gemessen in % von  $N$ ), so wird die Wachstumsrate  $W$  wie folgt definiert:

$$W = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} \quad (1)$$

$p_{n+1} - p_n =$  Zunahme der Population innerhalb eines Zeitintervalls

Verhulst (1845) nahm an, daß  $W$  proportional zu  $1 - p_n$  ist, d.h. je näher die Anzahl der Lebewesen an die maximal mögliche kommt, um so kleiner wird die Wachstumsrate  $W$ :

$$W = K(1 - p_n) \quad (2)$$

$K =$  Wachstumsparameter (abhängig von der Fruchtbarkeit)

Setzt man die Gleichungen (1) und (2) gleich, so erhält man die folgende Gesetzmäßigkeit für die Entwicklung der Population:

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = K(1 - p_n) \Rightarrow$$

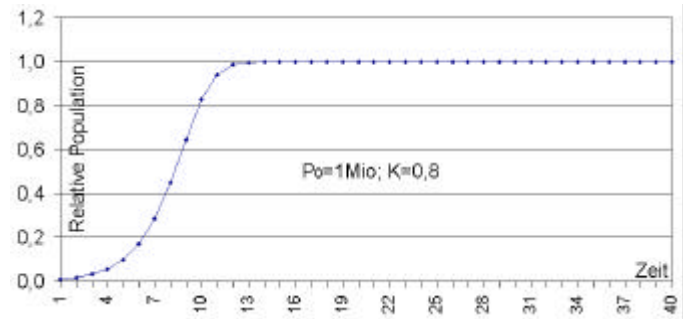
$$p_{n+1} = p_n + K(1 - p_n)p_n, n = 0, 1, 2, K \quad (3)$$

$p_0$  = Anfangspopulation (Anfangszahl)

Die folgenden Abbildungen 4 bis 9 zeigen was geschieht, wenn man mit einer Anfangspopulation von  $P_0=0,01$  startet und dann den Wachstumsparameter  $K$  von 0,8 bis auf 3 erhöht. Zur besseren Verdeutlichung - insbesondere der Ereignisse, die in den Abb.8 und 9 dargestellt sind - wollen wir alternativ zu den relativen Populationszahlen beispielhaft auch mit absoluten Bakterienanzahlen rechnen:

Wenn  $N$  (maximale Anzahl der Bakterien) z.B. 100 Millionen beträgt, so ist die Anfangspopulation 1 Millionen.

Wie in Abb.4 zu sehen ist, steigt die Population erst langsam und dann immer schneller an, um schließlich bei der Maximalzahl (z.B. 100 Mill.) konstant zu bleiben.

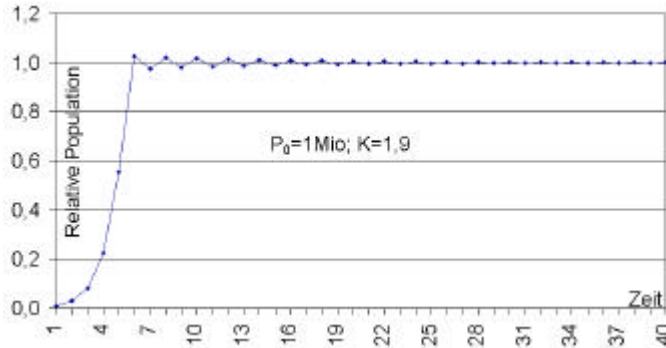


**Abb.4:** Wachstum der Bakterien, ausgehend von z.B. 1 Millionen. Die 1 auf der senkrechten Achse entspricht dann 100 Millionen Bakterien. Wachstumsparameter 0,8.

Dieses Verhalten hat man sicherlich auch erwartet, denn es entspricht dem Beispiel vieler anderer dynamischer Vorgänge, die uns bekannt sind (es herrscht Ordnung).

Wird der Wachstumsparameter jedoch verdoppelt ( $K=1,9$ ; Abb.5), so erfolgt der Übergang zur Maximalpopulation nach einem sehr raschen Anstieg in Form einer gedämpften Schwingung, d.h. der

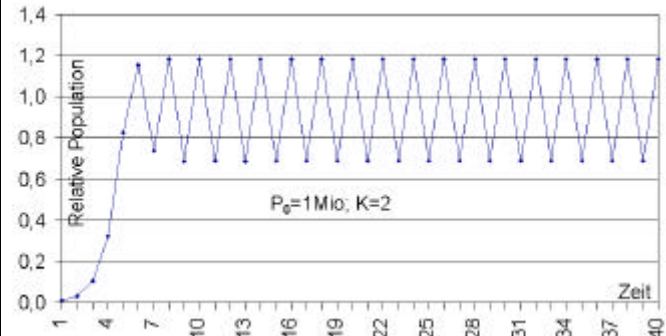
stationäre Zustand wird erst nach einer längeren Zeit erreicht.



**Abb.5:** Wachstum der Bakterien, ausgehend von z.B. 1 Millionen. Die 1 auf der senkrechten Achse entspricht dann 100 Millionen Bakterien. Wachstumsparameter 1,9.

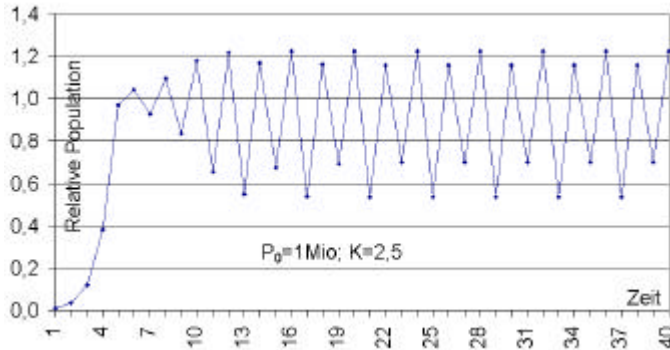
Eine weitere Erhöhung des Wachstumsparameters auf 2,3 bzw. 2,5 (Abb.6 bzw. 7) führt zur Ausbildung oszillierender Populationen. Im ersten Fall (Abb.6) wechseln die Bakterienanzahlen **ständig zwischen ca. 680.000 und 1.180.000 hin und her**; dieser Zustand ist jedoch stabil. Zeitweise

existieren 180.000 Bakterien mehr als aufgrund des Nahrungsangebotes lebensfähig sind und dadurch sinkt dann die Population um 500.000, um danach wieder anzusteigen.



**Abb.6:** Wachstum der Bakterien, ausgehend von z.B. 1 Millionen. Die 1 auf der senkrechten Achse entspricht dann 100 Millionen Bakterien. Wachstumsparameter 2,3.

Bei einem Wachstumsparameter von 2,5 bilden sich sogar zwei in der Schwankungshöhe unterschiedliche, aber stabile Zustände heraus (Abb.7).

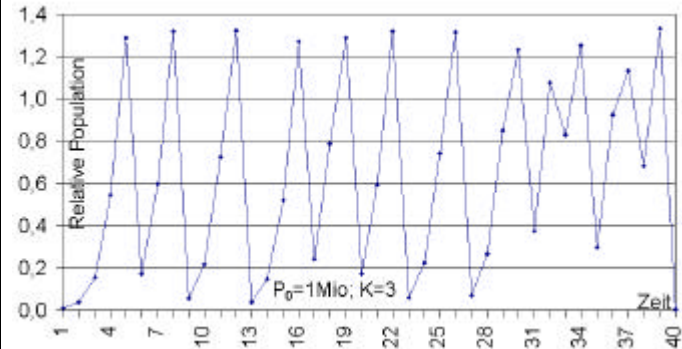


**Abb.7:** Wachstum der Bakterien, ausgehend von z.B. 1 Millionen. Die 1 auf der senkrechten Achse entspricht dann 100 Millionen Bakterien. Wachstumsparameter 2,5.

Erreicht der Wachstumsparameter die Größe 2,57, gibt es keine stabilen Zustände mehr: Das System geht ins Chaos über.

Zur besseren Verdeutlichung der chaotischen Zustände wollen wir den Wachstumsfaktor bis auf 3 erhöhen und dann untersuchen, wie sich eine Veränderung der Anfangspopulation auf den weiteren Verlauf auswirkt (Abb.8 und 9).

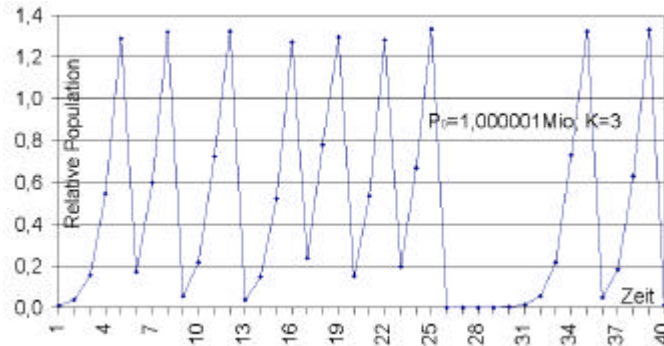
Zunächst einmal fällt auf, daß die Schwankungen extrem groß und unregelmäßig geworden sind, eben chaotisch. Bei der Zeit 39 in Abb.8 sinkt die Population sogar auf 290.000 ab, dieser Wert liegt noch unter der Ausgangspopulation von 1 Millionen.



**Abb.8:** Chaotisches Wachstum bei einem Wachstumsparameter von 3 und einer Anfangspopulation von 1 Millionen Bakterien.

Die Abb.9 zeigt einen Wachstumsverlauf mit demselben Wachstumsparameter ( $K=3$ ). Zunächst verläuft diese Kurve auch fast genauso wie in der

Abb.8. Später treten jedoch extreme Unterschiede auf (gut erkennbar ab der Zeit 26). Was hat sich geändert? Die vorgenommene Änderung war minimal: Zu der Anfangszahl der Bakterien von 1 Millionen wurde ein weiteres Bakterium hinzu gegeben. Der Startpunkt lag also bei 1.000.001 Bakterien statt bei 1.000.000 .



**Abb.9:** Chaotisches Wachstum der Bakterien unter den gleichen Bedingungen wie in Abb.8, jedoch wurde die Anfangspopulation um ein Bakterium erhöht (Wachstumsparameter = 3, Anfangspopulation = 1 000 001).

Hieraus läßt sich ein allgemeingültiges Prinzip mit großer Tragweite für die Beschreibung chaotischer Systeme herleiten:

**Schon geringfügige Änderungen im Anfangszustand eines chaotischen Systems führen nach einer bestimmten Zeit zu einem völlig anderen Zustandsverlauf!**

Hieraus läßt sich eine weitere wichtige Erkenntnis gewinnen:

**Da der Anfangszustand eines Systems nie mit absoluter Genauigkeit bestimmbar ist, sind chaotische Systeme unberechenbar!**

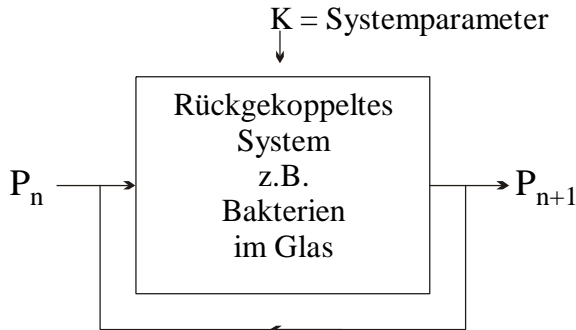
Hier mag man einwenden, daß dies nur eine Frage der Verbesserung unserer Meßmethoden sei. In einem gewissen Rahmen trifft das sicherlich auch zu, aber eine absolute Genauigkeit ist auch aus grundsätzlichen physikalischen Überlegungen heraus nie erreichbar (Heisenbergsche Unschärferelation). Diese Folgerung aus der Chaos-Theorie ist für denjenigen, der bisher an die Berechenbarkeit aller Vorgänge geglaubt hat, schwer zu akzeptieren.



### 3. Rückgekoppelte Systeme

#### Das Beispiel aus Kap.2

Die Gleichung 3 im vorangegangenen Kapitel beschreibt ein rückgekoppeltes System. Hierunter verstehen wir, daß der Zustand des Systems zu einem vorangegangenen Zeitpunkt die Eingangsgröße für die Berechnung des Zustandes nach dem nächsten Zeitintervall ist (Abb.10).



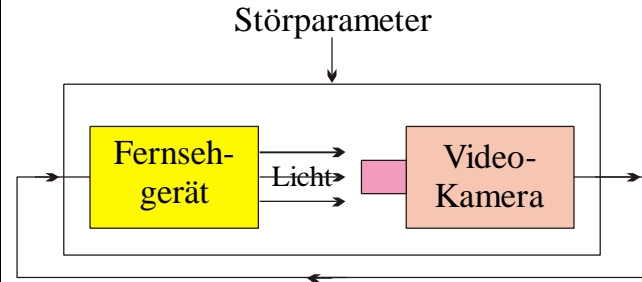
**Abb.10:** Beschreibung des Bakterienwachstums als Rückgekoppeltes System. Der Systemparameter entspricht dem Wachstumsparameter aus Kap.2.

Gleichung 3 kann man in die folgende Form bringen:

$$p_{n+1} = p_n(1 + K) - Kp_n^2 \quad (4)$$

Woraus ersichtlich wird, daß das rückgekoppelte System nichtlinear ist. Es zeigt sich, daß insbesondere nichtlinear rückgekoppelte Systeme leicht in den chaotischen Zustand übergehen.

#### Ein weiteres Beispiel: Videorückkopplung



**Abb.11:** Videorückkopplung

Ein weiteres Beispiel für ein rückgekoppeltes System, das unter bestimmten Bedingungen zu chaotischen Zuständen neigt, zeigt Abb.11.

Richtet man eine Fernsehkamera auf den Bildschirm eines Fernsehgerätes und verbindet den Ausgang der Kamera mit dem Eingang des Fernsehgerätes, so erkennt man auf dem Bildschirm ein Bild des Bildschirms und darin wieder ein Bild des Bildschirms und so weiter. Dieses zu erwartende Ergebnis ändert sich, wenn man den Raum verdunkelt. Je nachdem wie der Zustand des Systems und die Resthelligkeit ist, erscheinen auf dem Bildschirm interessante Muster, die ständig in Bewegung sind, und mit dem zuerst beschriebenen Bild nichts mehr gemeinsam haben.

Besonders interessante Muster erhält man häufig, wenn die Fernsehkamera um ihre optische Achse gedreht wird.

### Allgemeine Betrachtungen

*Beispiel:* nichtlineare Rückkopplung

$$X_{n+1} = X_n^2 + C$$

1)  $C = 0; X_0 = 0,5$

n =	0	1	2	3
$X_{n+1} =$	0,25	0,0625	0,00390625	0,0000152

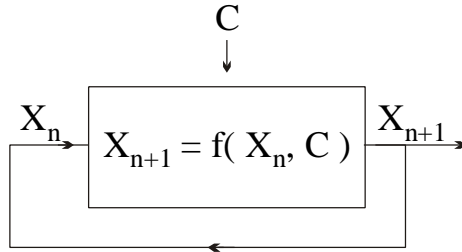
Die Folge strebt gegen Null!

2)  $C = 0; X_0 = 1,5$

n =	0	1	2	3	
$X_{n+1} =$	2,25	5,0625	25,6289	656,84..	...∞

Wie das Beispiel zeigt, würde im ersten Fall der Systemzustand dem Werte Null entgegen streben und im zweiten Fall gegen unendlich gehen.

Die beiden Werte null und unendlich werden als Attraktoren bezeichnet, weil sie bestimmte Systemzustände quasi anziehen.



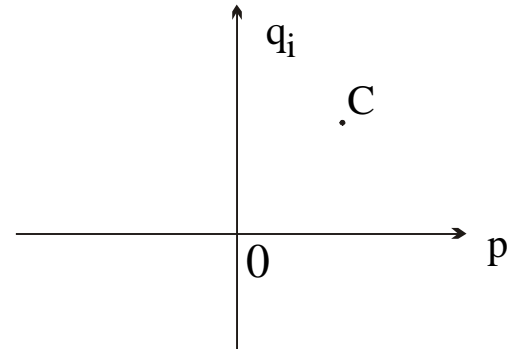
**Abb.12:** Allgemeine Beschreibung eines rückgekoppelten Systems

#### 4. Die Mandelbrot-Menge

Verallgemeinert man die Gleichung 4 und überführt sie in die komplexe Zahlenebene, so erhält man die folgende Gleichungsform:

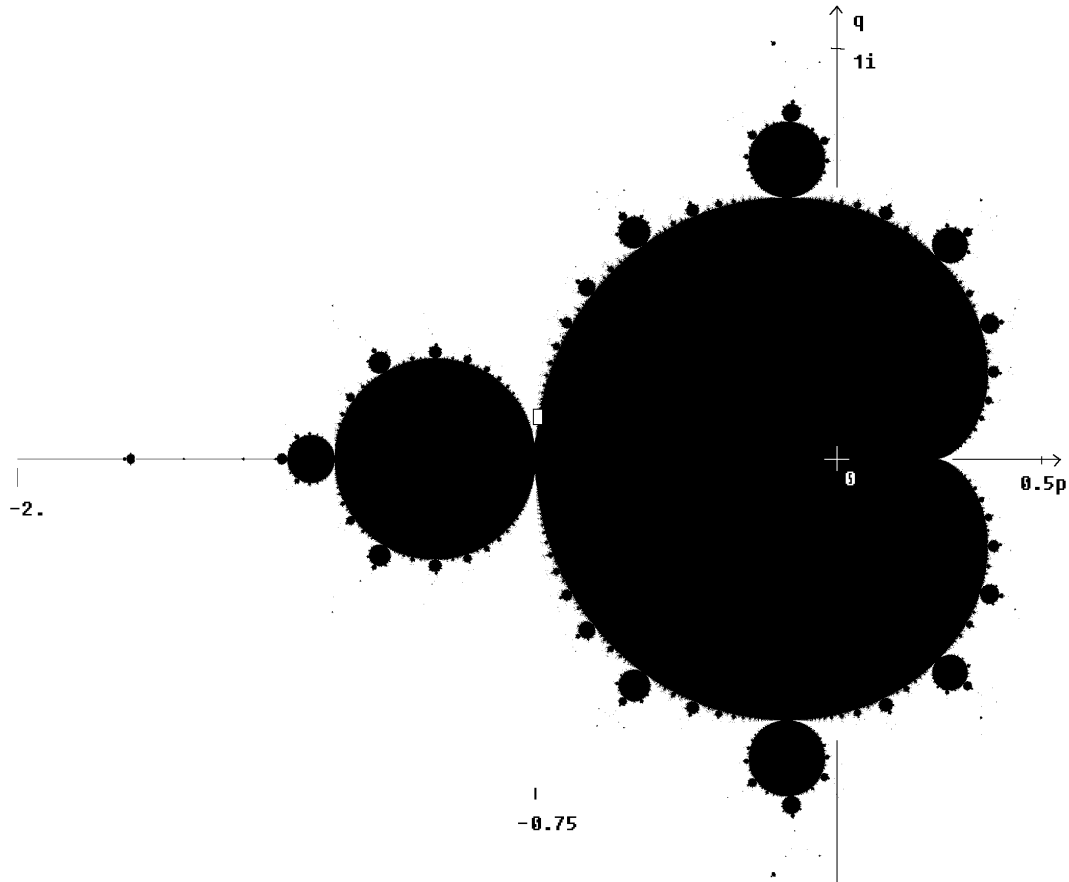
$$\boxed{Z_{n+1} = Z_n^2 + C} \quad (5)$$

$C$  = Systemparameter (Störparameter),  
 $Z$  und  $C$  sind komplexe Zahlen.



**Abb.13:** Komplexe Zahlenebene zur Darstellung der unterschiedlichen  $C$ -Werte,  $C = p + q_i$

Wer sich unter dem Begriff ‘komplexe Zahlen’ nichts vorstellen kann, braucht zum Verständnis des folgenden nur festzuhalten, daß die Zahlen, mit denen im weiteren gerechnet wird, aus zwei Anteilen bestehen. Den einen Anteil könnte man als  $x$ -Koordinaten und den anderen Anteil als  $y$ -Koordinaten eines Punktes in der Ebene auffassen (Abb.13).



**Abb.14:** Die Mandelbrotmenge

Wenn die beiden Anteile von  $C$  in einem Koordinatensystem dargestellt werden, ist jedem Wert von  $C$  ein Punkt zugeordnet (Abb.13). Auch mit diesen komplexen Zahlen wird für ein bestimmtes  $C$  eine Berechnung wie im letzten Beispiel für  $X$  durchgeführt. Streben die Werte gegen Null, so ist ein entsprechendes System im Zustand der Ordnung: Der Punkt zu diesem  $C$ -Wert wird im Diagramm (Abb.13) schwarz eingezeichnet.

Streben die Werte jedoch gegen unendlich, so wird der Punkt gar nicht eingezeichnet (weiß): Dieses System geht in den chaotischen Zustand über. Auf diese Weise entsteht bei der Berechnung ein Bild wie in Abb.14. Dieses Bild wurde 1980 von Benoit B. Mandelbrot berechnet und wird deshalb auch die Mandelbrot-Menge genannt.

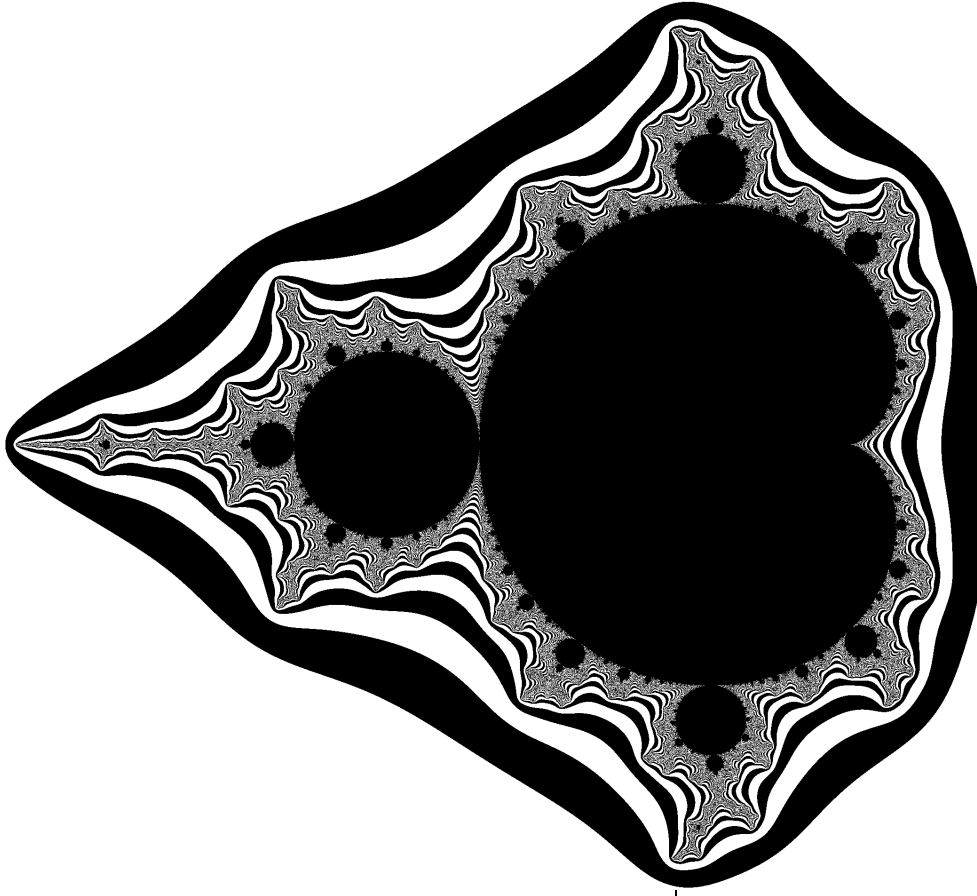
Besonders interessant ist der Rand der Mandelbrot-Menge, denn hier erfolgt der Übergang von Ordnung ins Chaos. Ein System mit einem  $C$ -Wert, der weit weg von der Mandelbrot-Menge (dem schwarzen Bereich) liegt, wird sehr schnell im

Chaos enden und ein System nahe am Rand des schwarzen Bereiches braucht sehr lange dazu.

Zur besseren Untersuchung der Bereiche außerhalb der Mandelbrot-Menge bedient man sich eines Tricks: Man denkt sich die Mandelbrot-Menge als eine zweidimensionale elektrisch geladene Fläche und betrachtet den Verlauf der Linien gleicher Feldstärke (Equipotentiallinien). Dies führt dann zu dem Bild in Abb.15.

Je nach den Möglichkeiten, die der zur Berechnung dieses Bildes benutzte Computer bietet, können die unterschiedlichen Potentialbereiche auch mit unterschiedlichen Farben dargestellt werden.

Wie kann man die Berechnung der Equipotentiallinien durchführen? Ist hierfür ein hoher mathematischer Aufwand erforderlich? Zum Glück nicht, denn man kann mathematisch beweisen, daß die Anzahl der Iterationsschritte (erneutes Berechnen des folgenden Zustandes aus dem vorangegangenen), die nötig sind, um festzustellen ob das System im Chaos endet, gleichzusetzen ist mit den unterschiedlichen Potentialstufen.



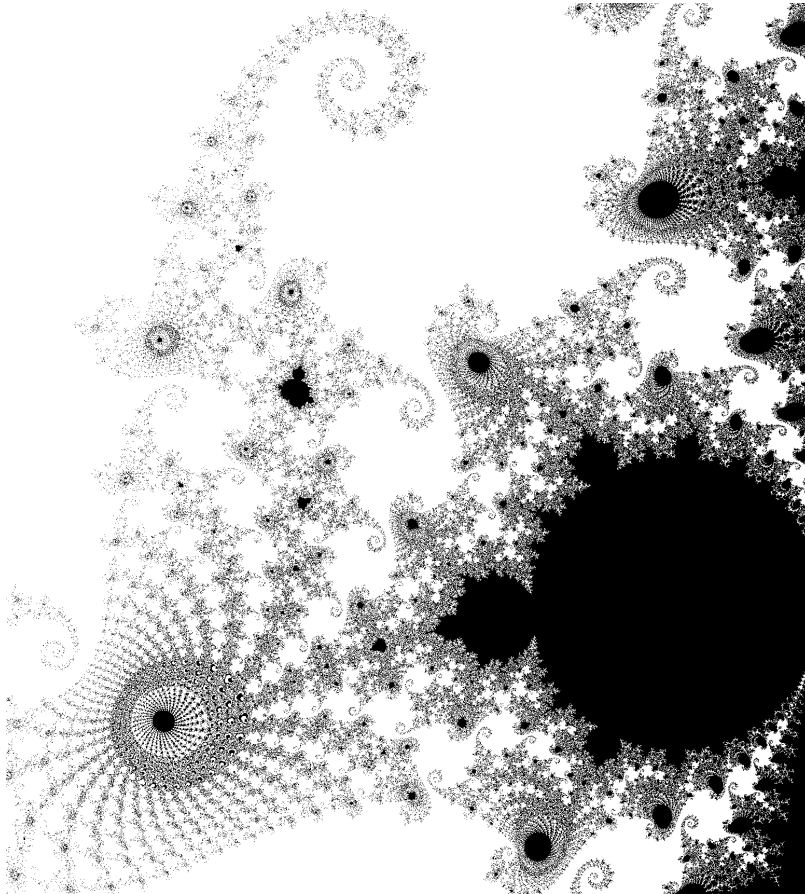
**Abb.15:** Elektrisches  
Feld um die  
Mandelbrotmenge

Zur Untersuchung der Randstruktur kann man kleine Bereiche aus Abb.15 herausnehmen und dann die Feldstruktur erneut berechnen. Die Abb.16 zeigt ein Beispiel dafür. Das Bild stammt aus dem Bereich, wo die große schwarze Menge (Kardioide) und der große Kreis aneinander grenzen (Rechteck in Abb.14). Das Bild in Abb.16 stellt eine Vergrößerung um den Faktor 250 dar. Weil die Struktur an ein Seepferdchen erinnert, wird dieser Bereich auch 'Tal der Seepferdchen' genannt. Mit den Mitteln des Computers kann man - wie mit einem Mikroskop - immer feinere Randstrukturen auflösen. Als Ergebnis erhält man, daß der Rand unendlich zerklüftet ist und selbst unsere größten Rechner hier zu keinem Ende kommen können, d.h. es lassen sich immer weitere Einzelheiten der Randstruktur auflösen - ohne Ende. Die Vergrößerung wird begrenzt durch die Leistungsfähigkeit des benutzten Rechners und durch die Zeit, die zur Berechnung eines Bildes zur Verfügung steht. Die Berechnung von Strukturen mit hoher Vergrößerung kann je nach Rechner bis zu einigen Tagen dauern. Selbst

die Grundmenge (Abb.15) benötigt auf einem einfachen Personal Computer (IBM-XT) mehrere Stunden für ihre Berechnung. Neben der Vergrößerung ist noch die Anzahl der berechneten Punkte, aus denen ein Bild besteht, von Interesse. Je mehr Punkte berechnet werden, um so größer ist die Auflösung des Bildes und um so mehr Rechenzeit wird benötigt. Die hier abgedruckten Bilder aus der Mandelbrot-Menge bestehen jeweils aus ca. 5 Millionen Bildpunkten und wurden vom Autor auf einem 32-Bit-PC berechnet.

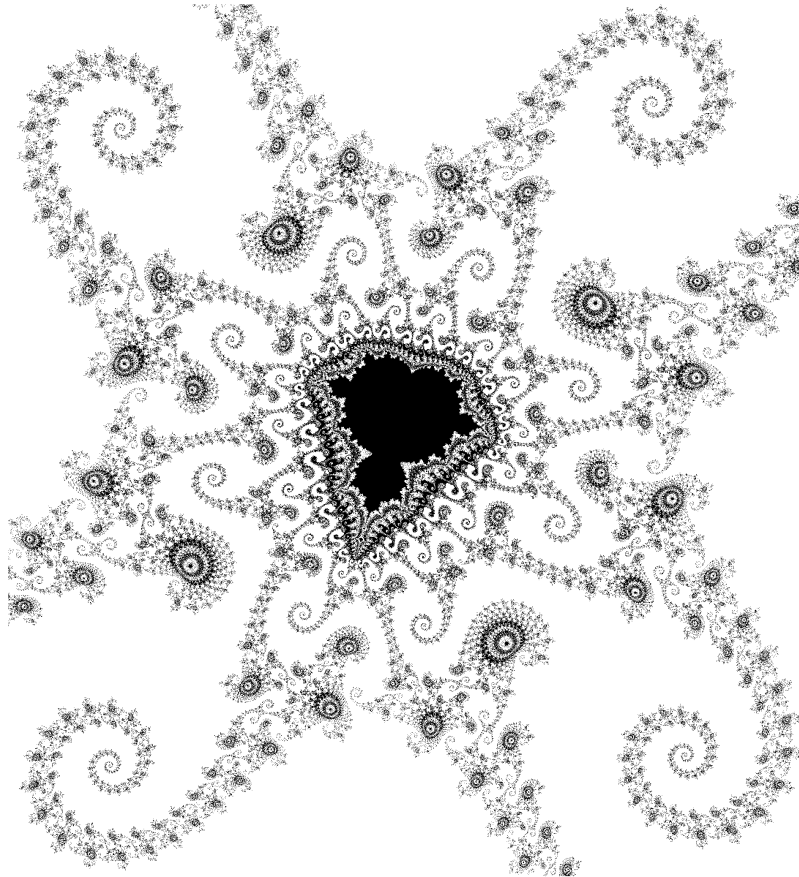
Die Abb.17 zeigt eine Detailstruktur aus dem Seepferdchenschwanz der Abb.1, mit einer Vergrößerung von 1.250.000 und einer Auflösung von ca. 8 Millionen Bildpunkten. Wie man sieht, taucht hier erneut eine Struktur auf, die der Hauptmenge aus Abb.14 entspricht. Solche sekundäre Mengen sind überall in der Randstruktur in unendlicher Anzahl enthalten.

Die Ergebnisse der Chaos-Theorie wurden bereits auf viele Gebiete von Naturwissenschaft und Technik angewandt und bestätigt..



**Abb.16:** Struktur aus dem Randbereich der großen schwarzen Fläche (Abb.14) in ca. 250-facher Vergrößerung





## Literatur

*Davies P.*, 1988: "Prinzip Chaos", C. Bertelsmann

*Deker U., Thomas H.* 1983: "Die Chaos-Theorie" in bild der wissenschaft 1-1983

*Peitgen H.-O., Richter P.H.* 1986: "The Beauty of Fractals" Springer Verlag

**Abb.17**: Struktur aus dem 'Seepferdchenschwanz' in 1,25-millionenfacher Vergrößerung